

# Momento de inercia y aceleración angular con Cobra SMARTsense



Física Mecánica Conservación e impulso de la energía



Nivel de dificultad

difícil



Tamaño del grupo

2



Tiempo de preparación

10 minutos



Tiempo de ejecución

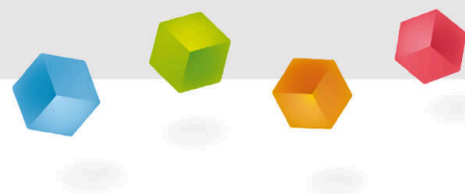
20 minutos

This content can also be found online at:



<http://localhost:1337/c/6081c35379956e0003cf060a>

PHYWE



## Información para el profesor

### Aplicación

PHYWE



Fig.1: Montaje experimental

El momento de inercia y la aceleración angular son fundamentales para el campo de la mecánica. Por ello, su comprensión es muy importante para el estudio de este campo.

## Información adicional para el profesor (1/2)

PHYWE



### Conocimiento Previo

Los conocimientos previos para este experimento se encuentran en la sección de Principio.



### Principio

Se aplica un par o torque conocido a un cuerpo que puede girar alrededor de un eje fijo con una fricción mínima. Se miden el ángulo y la velocidad angular a lo largo del tiempo y se determina el momento de inercia. El par se ejerce mediante una cuerda sobre una rueda de radio conocido con la fuerza sobre la cuerda resultante de la fuerza conocida de una masa en el campo gravitatorio de la tierra. La ganancia de energía conocida de la masa que desciende se convierte en energía de rotación del cuerpo observado.

## Información adicional para el profesor (2/2)

PHYWE



### Objetivo

El objetivo de este experimento es investigar el momento de inercia..



### Tareas

1. Medir el ángulo de rotación frente al tiempo de un disco. Aplicar varios pares constantes diferentes, generados con diversas fuerzas en tres radios diferentes. Calcular el momento de inercia del disco.
2. Medir el ángulo de rotación en función del tiempo de una barra, con dos masas montadas a diferentes distancias del eje de rotación. Calcular el momento de inercia de la barra.
3. Calcular la energía de rotación y el momento angular del disco a lo largo del tiempo. Calcular la pérdida de energía del peso a partir de la pérdida de altura a lo largo del tiempo y comparar.

## Principio (1/7)

PHYWE

El momento angular  $\vec{J}$  de una sola partícula en la posición  $\vec{r}$  con velocidad  $\vec{v}$ , la masa  $m$  y el momento  $\vec{p} = m\vec{v}$  se define como

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$$

y el par  $\vec{T}$  de la fuerza  $\vec{F}$  se define como

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Con un par y un momento angular que dependen del origen del sistema de referencia. El cambio de  $\vec{J}$  en el tiempo es

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

## Principio (2/7)

PHYWE

y con  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$

y la ley de Newton  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  la ecuación del movimiento se convierte en

$$\vec{T} = \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (1)$$

Para un sistema de  $N$  partículas con centro de masa  $\vec{R}_{c.m.}$  y el momento lineal total  $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i$  el momento angular es

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{c.m.}) \times \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_{c.m.} \times \vec{v}_i = \vec{J}_{c.m.} + \vec{R}_{c.m.} \times \vec{P}$$

## Principio (3/7)

PHYWE

Ahora se desprecia el movimiento del centro de masa, se fija el origen en el centro de masa y se supone un cuerpo rígido con  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  fijo. La velocidad de la partícula  $i$  puede escribirse como  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$  con el vector de rotación

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (2)$$

constante en todo el cuerpo. A continuación,

$$\vec{J} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$\text{con } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{es } \vec{J} = \sum m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}))$$

## Principio (4/7)

PHYWE

$$\text{con } \vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$$

$$\text{y } J_z = \omega_z \sum m_i (r_i^2 - z_i^2) - \omega_x \sum m_i z_i x_i - \omega_y \sum m_i z_i y_i$$

Los coeficientes de inercia o momentos de inercia se definen como

$$I_{x,x} = \sum m_i (r_i^2 - x_i^2) \quad (3.1)$$

$$I_{x,y} = - \sum m_i x_i y_i \quad (3.2)$$

$$I_{x,z} = - \sum m_i x_i z_i \quad (3.3)$$

y con la matriz  $\hat{I} = \{I_{k,l}\}$  es

$$\vec{J} = \hat{I} \cdot \vec{\omega} \quad (4)$$

## Principio (5/7)

PHYWE

y para la aceleración rotacional  $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  se deduce que

$$\vec{T} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \hat{I} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \hat{I} \cdot \vec{\alpha}$$

La energía de rotación es

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} I_{k,l} \omega_k \omega_l$$

Convención de la suma: sumar sobre los mismos índices utilizando

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Los ejes de coordenadas siempre pueden fijarse en los "ejes principales de inercia", de modo que sólo los elementos diagonales de la matriz  $I_{k,k} \neq 0$ . En este experimento sólo puede producirse una rotación alrededor del eje z y  $\vec{\omega} = \hat{e}_z \omega_z = \hat{e}_z \omega$  con el vector unitario  $\hat{e}_z$ . Entonces, la energía es

$$E = \frac{1}{2} I_{z,z} \omega^2 \quad (5)$$

## Principio (6/7)

PHYWE

El par de torsión  $T = m_a(g - a)r_a$  es casi constante en el tiempo ya que la aceleración  $a = \alpha \cdot r_a$  de la masa  $m_a$  utilizada para acelerar la rotación es pequeña comparada con la aceleración gravitacional  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  y el hilo es siempre tangencial a la rueda con  $R_a$ :

$$T = I_{z,z} \frac{d^2\varphi}{dt^2} = m_a g r_a \quad (6)$$

$$\omega(t) = \omega(t=0) + \frac{m_a g r_a}{I_{z,z}} \cdot t = \omega(t=0) + \frac{T}{I_{z,z}} \cdot t \quad (7)$$

$$\varphi(t) = \varphi(t=0) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m_a g r_a}{I_{z,z}} \cdot t^2 = \varphi(t=0) + \frac{1}{2} \frac{T}{I_{z,z}} \cdot t^2 \quad (8)$$

## Principio (7/7)

PHYWE

La energía potencial del peso que acelera, utilizando las ec. (8) y (7), es

$$E = m_a g h(t) = -m_a g \varphi(t) r_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_a^2 g^2 r_a^2}{I_{z,z}} \cdot t^2 = \frac{1}{2} I_{z,z} \omega^2$$

verificando así (4).

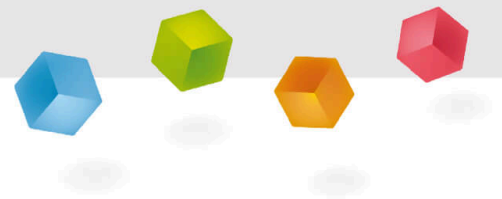
Si un peso  $m_i$  se monta en una varilla que puede girar alrededor del eje z fijo perpendicular a él en una distancia  $r_i$ , tal vez la varilla que se encuentra a lo largo del eje y, entonces las coordenadas del peso son  $(0, r_i, 0)$  y, según (3), el momento de inercia alrededor del eje z es  $I_{z,z} = m_i r_i^2$  alrededor del eje x es  $I_{x,x} = m_i r_i^2$  y en torno al eje Y es  $I_{y,y} = 0$

## Material

Posición	Material	Artículo No.	Cantidad
1	<a href="#">Coijnete de giro de precision</a>	02419-00	1
2	<a href="#">Base trípode PHYWE</a>	02002-55	1
3	<a href="#">Varilla de inercia</a>	02417-03	1
4	<a href="#">Placa giratoria con escalaangular</a>	02417-02	1
5	<a href="#">Cobra SMARTsense - Rotary Motion (Bluetooth + USB)</a>	12918-01	1
6	<a href="#">measureLAB, Software para mediciones y evaluaciones</a>	14580-61	1
7	<a href="#">Varilla de acero inoxidable, 18/8, 250 mm</a>	02031-00	1
8	<a href="#">Pinza para mesa Expert</a>	02011-00	1
9	<a href="#">Hilo de pescar. Rollo. L=100 m</a>	02090-00	1
10	<a href="#">Soporte para pesas con ranura, 10 g</a>	02204-00	1
11	<a href="#">Peso con ranura, 10 g, negro</a>	02205-01	10
12	<a href="#">Peso con ranura, 50 g, negro</a>	02206-01	2
13	<a href="#">Cargador USB para Cobra SMARTsense y Cobra 4</a>	07938-99	1



PHYWE



## Montaje y Ejecución

### Ejecución

PHYWE

Preparar el experimento como se muestra en la Fig. 1: Conectar el sensor de movimiento al ordenador. Ajustar la plataforma giratoria para que esté en posición horizontal. Fijar el hilo de seda (con el soporte del peso en un extremo) con el tornillo del rodamiento de precisión o con un trozo de cinta adhesiva a las ruedas con las ranuras del eje de rotación y enrollarlo varias veces alrededor de una de las ruedas, suficientes vueltas para que el peso pueda llegar al suelo. Asegurarse de que el hilo, la rueda del sensor de movimiento y la rueda seleccionada del rodamiento de precisión estén bien alineados, de modo que el hilo discorra horizontalmente entre las ruedas. Colocar el dispositivo de sujeción con desbloqueo de cable por debajo de la plataforma giratoria, de modo que sujete la plataforma giratoria al colocarla en su orificio, pero que no perturbe el movimiento después de soltarla.



Fig.1: Montaje experimental

## Montaje (1/4)

PHYWE

Asegurarse de que el hilo, la rueda del sensor de movimiento y la rueda seleccionada del rodamiento de precisión estén bien alineados, de modo que el hilo discorra horizontalmente entre las ruedas. Colocar el dispositivo de sujeción con desbloqueo por cable debajo de la plataforma giratoria, de modo que sujete la plataforma giratoria al colocarla en su orificio, pero que no perturbe el movimiento después de soltarla.



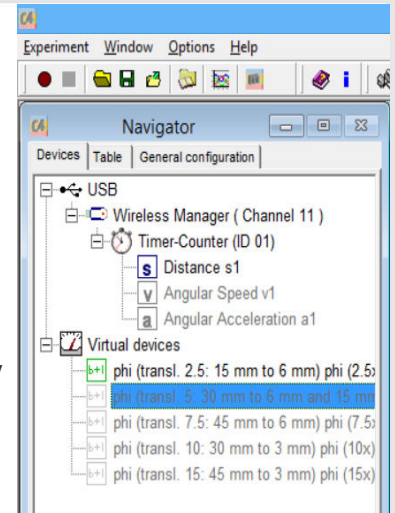
Iniciar el software "measure" y cargar el experimento (10. TESS expert Physics > 03. Mechanics > P2131363). Iniciar la medición con el botón "grabar"  y soltar la plataforma giratoria. Detener la grabación de datos justo antes de que el peso llegue al suelo con el botón "stop"  (para no obtener datos irrelevantes al final de los datos grabados).

Fig. 2:  
Seleccionar el canal con la respectiva traslación para las ruedas utilizadas del rodamiento de precisión y el sensor de movimiento.



## Montaje (2/4)

PHYWE

1. Registrar las mediciones con diferentes pesos de aceleración  $m_a$  de hasta 100 g. Dejar que el hilo pase por la misma rueda del rodamiento de precisión ( $r = \text{const}$ ) y por la rueda grande del sensor de movimiento ( $r_{\text{ms}} = 6 \text{ mm}$ ) para toda la serie de mediciones. Establecer la traslación respectiva para las ruedas seleccionadas de los "dispositivos virtuales" como se muestra en la Fig. 2 y 3: Seleccionar el canal con la traslación deseada, haga clic en él con el botón derecho del ratón y elegir "configuración". En la nueva ventana, establecer el estado en "activado". Desactivar todos los demás canales seleccionándolos y poniendo el estado en "desactivado". Una vez hecho esto, sólo debe aparecer un canal virtual resaltado en verde, como se muestra en la Fig. 2 (por ejemplo, factor de traslación de 2,5 para la rueda pequeña del rodamiento de precisión ( $r = 15 \text{ mm}$ ) y la rueda grande del sensor de movimiento ( $r_{\text{ms}} = 6 \text{ mm}$ ) seleccionado). Registrar las mediciones con el hilo que pasa por diferentes ruedas del rodamiento de precisión. Utilizar las respectivas masas de aceleración para mantener el par de torsión  $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot m_a \cdot g$  siendo  $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 9.81 \text{ N/kg}$  la aceleración gravitatoria. Por ejemplo, utilizaremos  
 a)  $m_a = 60 \text{ g}$  para  $r = 15 \text{ mm}$ , b)  $m_a = 30 \text{ g}$  para  $r = 30 \text{ mm}$ , y  
 c)  $m_a = 20 \text{ g}$  para  $r = 45 \text{ mm}$ .  
 En cada caso, el par  $T = r \cdot m_a \cdot g = 8.83 \text{ mNm}$  será constante.

## Montaje (3/4)

PHYWE

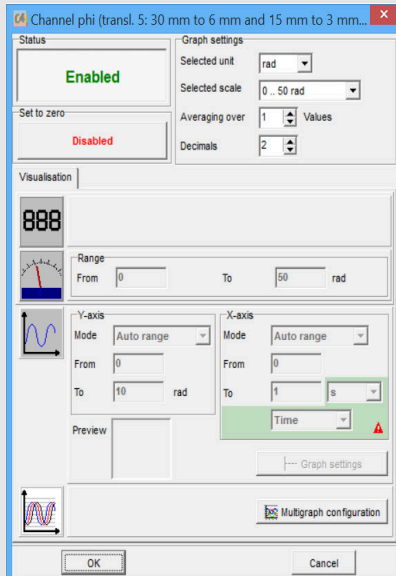


Fig. 3:  
Activar una traslación poniendo el estado en "activado" y desactivar todas las demás traslaciones poniendo el estado en "desactivado"

Registrar las mediciones con un peso constante  $m_a = \text{const.}$  para cada rueda del rodamiento de precisión.

También se puede realizar una medición con el peso tan ligero que casi no afecte al movimiento (como el soporte de peso vacío de 10 g) pero que sea suficiente para accionar el plato giratorio. Si es necesario, poner en marcha la plataforma giratoria mediante un empujón con la mano. Debido a la ligera fricción, se debería observar un movimiento casi no acelerado.

## Montaje (4/4)

PHYWE

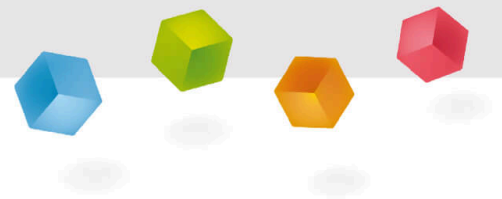
Retirar la plataforma giratoria y montar la varilla de inercia en el rodamiento de precisión. Colocar sus dos soportes de peso simétricamente en la varilla con ambos a la misma distancia del eje. Realizar las mediciones con masas aceleradoras variables  $m_{a,i}$  en una ranura de la rueda con  $r = \text{const}$  y también con una masa aceleradora constante  $m_a = \text{const}$  para las tres ranuras de la rueda con los radios  $r_i$ . Dejar que el hilo pase por la rueda grande del sensor de movimiento ( $r_{\text{ms}} = 6 \text{ mm}$ ) y seleccionar el canal virtual con la respectiva traslación para la rueda utilizada del rodamiento de precisión. Ambas masas en la barra deben permanecer montadas simétricamente en las mismas posiciones. Para investigaciones posteriores, puede determinar el comportamiento con las masas en diferentes posiciones simétricas. Para una mayor precisión, también puede repetir la segunda parte con una serie de masas aceleradas  $m_{a,i}$  para cada ranura de la rueda.

### Notas:

Para pesos pesados puede ajustar el tiempo "obtención de valor"(Get Value) a 200 ms y para pesos bajos se puede ajustar este tiempo a valores más altos.

Para investigaciones futuras, también se puede utilizar la rueda pequeña del sensor de movimiento y repetir la serie de mediciones. Asegurarse de seleccionar la traslación respectiva.

PHYWE



## Resultados

### Resultados (1/4)

PHYWE

Graficar el ángulo de rotación frente al cuadrado del tiempo utilizando las opciones en el menú "Análisis" > \ "Modificación del canal" ("Analysis" > "Channel modification"). El cero correcto del tiempo  $t_0$  (el inicio del movimiento sin distorsión digital) se puede encontrar con la herramienta de medida \ "Regresión" ("Regression") utilizada en los valores \ "omega" o en la tabla de datos como el primer valor donde el ángulo supera el cero.

Seleccionar el tiempo como canal fuente e introducir la operación " $(t-t_0)^2$ " con su valor real  $t_0$  en la ventana de modificación de su canal. A continuación, utilizar "Medición" > "Gestor de canales..." ("Measurement" > "Channel manager...") para seleccionar el cuadrado del tiempo como eje x y "ángulo" ("Angle") como eje y.

La pendiente de la curva obtenida es la mitad de la aceleración angular y se puede determinar con la herramienta "Regresión". La Fig. 4 muestra los datos obtenidos de varias mediciones que se han puesto en un diagrama con "Medición" > "Asumir canal..." ("Measurement" > "Assume channel...") y se han escalado al mismo valor con la herramienta "Escalar curvas" y la opción "Ajustar a valores" ("Scale curves" and "set to values"). Se puede observar muy bien la linealidad con respecto al tiempo.

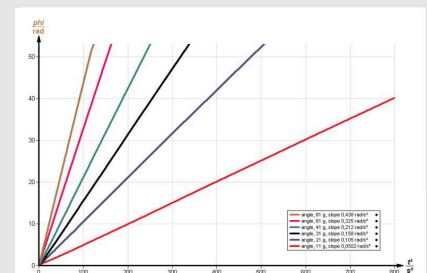


Fig. 4: Ángulo frente al cuadrado del tiempo para la plataforma giratoria.

## Resultados (2/4)

PHYWE

En la Fig. 5, los valores de aceleración angular de la Fig. 4 se han representado frente al par utilizado  $T = gm_a r_a$  con \ "Medición" > \ "Introducir datos manualmente..." ("Measurement" > "Enter data manually").

La pendiente inversa es el momento de inercia y se lee  $I = 13.3 \text{ mN m s}^2 = 133 \text{ kg cm}^2$  para el disco. También se puede trazar el momento de inercia  $I_{z,z} = m_i r_i^2 + I_{\text{rod};z,z}$  frente al peso  $m_i$ . Con los valores de la regresión se obtiene  $r_i$  de la pendiente y  $I_{\text{rod};z,z}$  a partir de la intercepción del eje.

Los datos de aceleración angular pueden evaluarse a partir de las mediciones con la función "Regresión" de los valores "omega" e introducirse con "Medición" > "Introducir datos manualmente..." en una "Medición creada manualmente". Los valores del momento de inercia se calculan con "Análisis" > "Modificación del canal" ("Analysis" > "Channel modification").

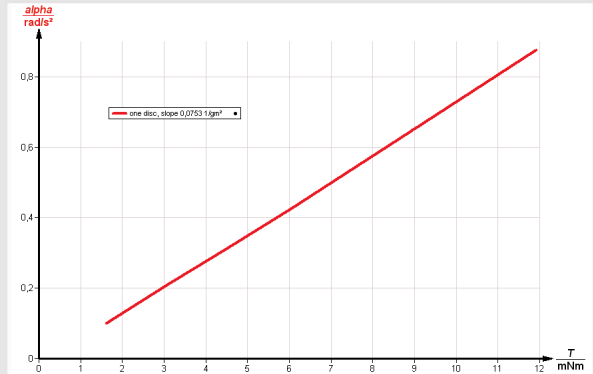


Fig. 5: Aceleración angular frente al par de aceleración.

## Resultados (3/4)

PHYWE

Si no, se puede evaluar los datos utilizando un gráfico bilogarítmico - pero aquí es crucial corregir los datos para el punto cero correcto del tiempo y el ángulo utilizando \ "Análisis" > \ "Modificación del canal..." restando  $t_0$  y sumar/restar  $\varphi_0$  y haciendo un trazado de los canales cambiados con \ "Medición" > \ "Gestor de canales...", borrando los valores inferiores a cero en la tabla de datos y utilizando la herramienta \ "Opciones de visualización" para establecer la escala de ambos ejes en \ "logarítmica".

La Fig. 6 muestra un ejemplo para la barra con 2 veces 80 g montada a 21 cm del eje y acelerada con un peso de 21 g en la ranura de la rueda con un radio de 15 mm, es decir, un par de 3,09 mNm.

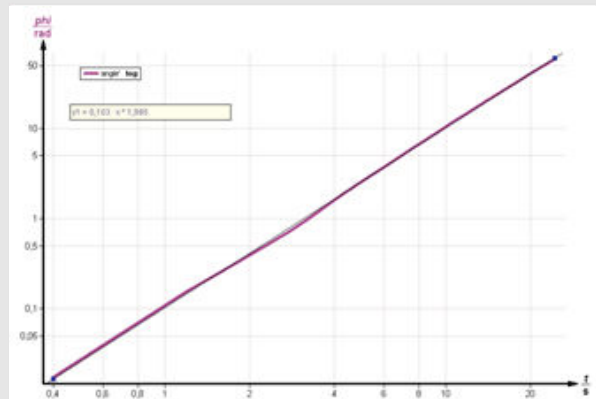


Fig. 6: Gráfico bilogarítmico del ángulo frente al tiempo.

**Resultados (4/4)****PHYWE**

A partir de  $\varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$  se lee

$$\frac{1}{2}\alpha = 0.103 \frac{1}{s^2} \Rightarrow \alpha = 0.203 \frac{1}{s^2}$$

Por otro lado  $T = 4,09 \text{ mNm}$ :  $\alpha \cdot \hat{I} \Rightarrow \hat{I}_z = 150 \text{ kg cm}^2$  en comparación con la teoría

$$\hat{I}_z = 2 \cdot 80 \text{ g} \cdot (21 \text{ cm})^2 + \hat{I}_{\text{rod},z} = 70.6 \text{ kg cm}^2 + 72 \text{ kg cm}^2 = 143 \text{ kg cm}^2$$