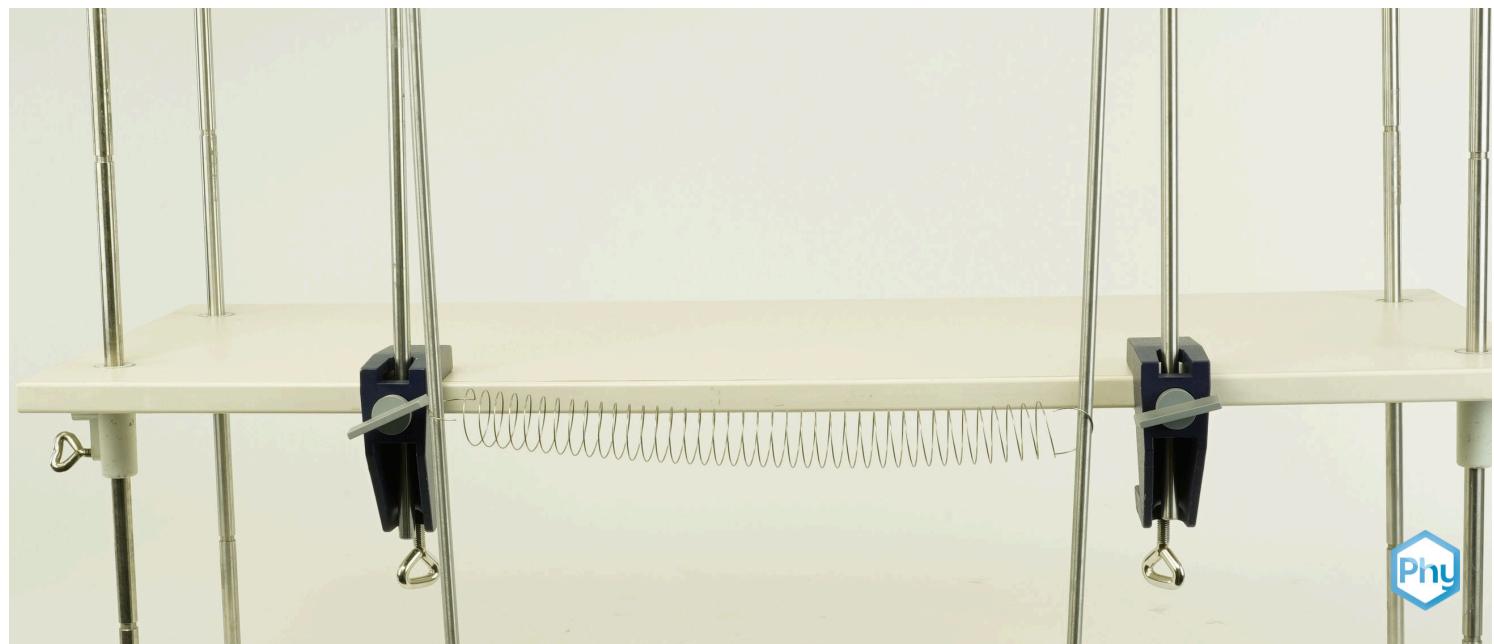


# Péndulos acoplados con Cobra SMARTsense



Física

Acústica

Movimiento ondulatorio



Nivel de dificultad



Tamaño del grupo



Tiempo de preparación



Tiempo de ejecución

This content can also be found online at:

<http://localhost:1337/c/6318ded30ca493000341ea28>

PHYWE



# Información para el profesor

## Aplicación

PHYWE



Montaje del experimento

Las oscilaciones pendulares ofrecen una primera comprensión de los sistemas mecánicos cercanos al oscilador armónico, que es fundamental en la descripción de muchos sistemas físicos en campos como la física de partículas y la física del estado sólido.

Este experimento investiga el comportamiento de un sistema de este tipo utilizando péndulos acoplados.

## Información adicional para el profesor (1/2)

PHYWE



**Conocimiento  
previo**

Hay que conocer el comportamiento de un péndulo singular.



**Principio**

Dos péndulos gravitacionales idénticos con una frecuencia característica determinada se acoplan a través de un muelle espiral "blando". Las amplitudes de ambos péndulos se registran en función del tiempo. Los factores de acoplamiento se determinan mediante diferentes métodos. A continuación, se integran en el vídeo los puntos locales de la oscilación.

## Información adicional para el profesor (2/2)

PHYWE



**Objetivo**

El objetivo de este experimento es investigar el comportamiento de oscilación de un péndulo acoplado.



**Tareas**

1. Determinación de la constante del muelle de acoplamiento.
2. Determinación y ajuste de la frecuencia característica del péndulo desacoplado. Determinación del momento de inercia del péndulo.
3. Representación gráfica de la oscilación de los dos péndulos en función del tiempo y determinación de la frecuencia de oscilación comparada con la frecuencia de oscilación teórica para A) la oscilación "en fase". B) la oscilación "antifásica". C) el caso de batido.

## Principio (1/8)

Si dos péndulos de gravedad  $P_1$  y  $P_2$  con la misma frecuencia característica  $\omega_0$  están acoplados por medio de un muelle, se cumple lo siguiente para el par en el caso de la posición de reposo y en el caso de pequeñas desviaciones debidas a la gravedad y a la tensión del muelle (ver la figura 1):

Par debido a la gravedad:

$$M_{s,0} = mgL \sin(\Phi_0) \approx mgL\Phi_0 \quad (1)$$

Par debido a la tensión del muelle:

$$M_{F,0} = -D_F x_0 l \cos(\Phi_0) \approx -D_F x_0 l$$

$D_F$  Constante del muelle,  $x_0$  Alargamiento del muelle,  $I$  Fuerza de acoplamiento,  $m$  Masa del péndulo,  $L$  Longitud del péndulo,  $g$  Aceleración gravitatoria,  $\Phi_0$  Ángulo entre la vertical y la posición de reposo

## Principio (2/8)

Si  $P_1$  es desviado por  $D_F$  y  $P_2$  por  $\Phi_0$  y se liberan los dos péndulos simultáneamente, el siguiente resultado es a causa de:

$$I\ddot{\Phi} = M$$

$I$  = Momento de inercia del péndulo alrededor de su pivote

$$I\ddot{\Phi}_1 = M_1 = -mgL\Phi_1 + D_f l^2(\Phi_2 - \Phi_1) \quad (2)$$

$$I\ddot{\Phi}_2 = M_2 = -mgL\Phi_2 + D_f l^2(\Phi_2 - \Phi_1)$$

Tras la introducción de las abreviaturas

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I} \text{ y } \Omega^2 = \frac{D_f l^2}{I} \quad (3)$$

## Principio (3/8)

A partir de la ecuación (2) obtenemos lo siguiente

$$\ddot{\Phi}_1 + \omega_0^2 \Phi_1 = -\Omega^2 (\Phi_2 - \Phi_1) \quad (4)$$

$$\ddot{\Phi}_2 + \omega_0^2 \Phi_1 = +\Omega^2 (\Phi_2 - \Phi_1)$$

Con, t=0 se realizan con éxito las siguientes tres condiciones iniciales.

A) Oscilación "en fase"

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_A; \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

B) Oscilación "antifásica".

$$-\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_A; \Phi_1 - \Phi_2 = 2\Phi$$

C) Caso de golpeo

$$\Phi_1 = \Phi_A; \Phi_2 = 0; \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi_A$$

Las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales (4) con las condiciones iniciales (5) son:

$$A: \Phi_1(t) = \Phi_2(t) = \Phi_A \cos(\omega_0 t) \quad (6a)$$

$$B: \Phi_1(t) = \Phi_A \cos(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} t) \quad (6b)$$

$$\Phi_2(t) = -\Phi_A \cos(\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} t)$$

## Principio (4/8)

$$\Phi_1(t) = \Phi_A \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right) \quad (6c)$$

$$\Phi_2(t) = \Phi_A \cos\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \cdot t\right)$$

### Nota

A. Oscilación "en fase".

Ambos péndulos oscilan en fase y con la misma amplitud y frecuencia  $\omega_g$ . Esta última es idéntica a la frecuencia característica del  $\omega_0$  péndulo desacoplado.

$$\omega_g = \omega_0 \quad (7a)$$

## Principio (5/8)

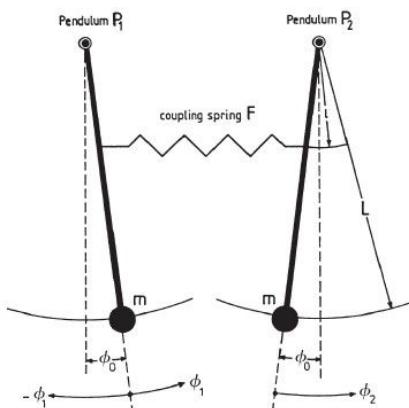


Figura 1: Diagrama que indica los distintos nombres que se utilizan en el contexto del péndulo acoplado.

### B. Oscilación "antifásica".

Ambos péndulos oscilan con la misma amplitud y frecuencia  $\omega_C$  pero con una diferencia de fase de  $\pi$ . De acuerdo con (3), la frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} \quad (7c)$$

depende de la longitud del péndulo l.

## Principio (6/8)

### C. Caso de golpeo

Para un acoplamiento débil, por ejemplo,  $\omega_0 \gg \Omega$  la frecuencia angular del primer factor puede expresarse como sigue

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} - \omega_0}{2} \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0} \quad (8a)$$

Para la frecuencia angular del segundo factor, obtenemos

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2} + \omega_0}{2} \approx \omega_0 \frac{\Omega^2}{2\omega_0} \quad (8b)$$

Como resultado, obtenemos lo siguiente:

$$\omega_1 < \omega_2$$

## Principio (7/8)

PHYWE

La figura 1 muestra las amplitudes  $\Phi_1(t)$  y  $\Phi_2(t)$  de ambos péndulos en función del tiempo para el caso de latido y para diferentes longitudes de acoplamiento. Como factor de acoplamiento, definimos la relación

$$K = \frac{D_F l^2}{mgL + D_F l^2} \quad (9)$$

De las ecuaciones (3) y (9) obtenemos

$$K = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 + \Omega^2} \quad (10)$$

El factor de acoplamiento  $K$  de la ecuación (10) puede calcularse a partir de las frecuencias de los distintos modos de oscilación. Sustituyendo las ecuaciones (7a) y (7b) en la ecuación (10) se obtiene

$$K = \frac{\omega_c^2 - \omega_g^2}{\omega_c^2 + \omega_g^2} \text{ (oscilación "antifásica")} \quad (11)$$

## Principio(8/8)

PHYWE

Sustituyendo las ecuaciones (8a) y (8b) en la ecuación (10) se obtiene

$$K = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (12)$$

Para comprobar la influencia de la longitud de acoplamiento en las frecuencias de las distintas oscilaciones, sustituimos las ecuaciones (11) y (12) en la ecuación (9). Así se obtiene lo siguiente para la oscilación "antifásica":

$$\omega_1^2 = \frac{2D_F\omega_0^2}{mgL}l^2 + \omega_0^2 \quad (13)$$

Los siguientes resultados para el caso de los latidos:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{D_F}{2mgL}l^2 \quad (14)$$

$$\text{y } \omega_2 = \omega_0 \frac{D_F}{2mgL}l^2 + \omega_0 \quad (15)$$

## Material

Posición	Material	Artículo No.	Cantidad
1	PENDULO C.CONEXION P.REGISTRAD.	02816-00	2
2	Muelle helicoidal, 3N/m	02220-00	1
3	Varillas con gancho	02051-00	1
4	Soporte para pesas con ranura, 10 g	02204-01	1
5	Peso con ranura, 10 g, plateado	02205-03	5
6	Cobra SMARTsense Voltage - Sensor para medir la tensión eléctrica $\pm 30$ V (Bluetooth + USB)	12901-01	2
7	Cargador USB para Cobra SMARTsense y Cobra 4	07938-99	1
8	measureLAB, Software para mediciones y evaluaciones	14580-61	1
9	PHYWE Fuente de poder DC: 0...12 V, 2 A / AC: 6 V, 12 V, 5 A	13506-93	1
10	Pinza para mesa Expert	02011-00	2
11	Varilla de acero inoxidable, 18/8, 750 mm	02033-00	2
12	Doble nuez	02054-00	4
13	Cinta métrica, $l = 2$ m	09936-00	1
14	Cable de conexión, 32 A, 1000 mm, rojo	07363-01	2
15	Cable de conexión, 32 A, 1000mm, AZUL	07363-04	2
16	Varilla de acero inoxidable, 18/8, 500 mm	02032-00	1
17	CABLE DE CONEX. 100 mm, AZUL	07359-04	2
18	CABLE DE CONEX. 100 mm, ROJO	07359-01	2

PHYWE



# Montaje y ejecución

## Montaje y ejecución (1/6)

PHYWE

Para realizar el experimento se necesita el Cobra SMARTsense Photogate y measureAPP. La aplicación se puede descargar de forma gratuita desde la App Store - códigos QR ver abajo. Comprobar si el Bluetooth está activado en el dispositivo (tablet, teléfono inteligente).



measureAPP para sistemas operativos Android



measureAPP para sistemas operativos iOS



measureAPP para tablets / PC con Windows 10

## Montaje y ejecución (2/6)



Fig. 2: Montaje del experimento

Antes de iniciar las mediciones, el valor exacto de la constante del muelle  $D_F$  del muelle de acoplamiento debe determinarse. Para ello, el muelle se coloca en la mesa, se fija por un lado y se extiende por el otro mediante el dinamómetro. Al hacerlo, se puede leer la fuerza necesaria  $F$  en el dinamómetro y se mide la elongación  $x$  con la cinta métrica. La constante del muelle se puede determinar fácilmente a partir de la ley de Hooke:

$$D_F = \frac{F}{x}$$

Se recomienda alargar el muelle 10 cm, 20 cm y 30 cm para obtener un valor medio de la constante del muelle  $D_F$ .

## Montaje y ejecución (3/6)

Colocar ambos péndulos sin el muelle de acoplamiento como se muestra en la figura 2.

Para hacer oscilar el péndulo, tocar las varillas del péndulo en el tercio superior con las puntas de los dedos y desplazarlas simultáneamente en la misma dirección o en direcciones opuestas hasta alcanzar la amplitud deseada. De este modo, se pueden evitar las oscilaciones transversales. De cara al experimento posterior, hay que asegurarse de que los péndulos oscilan en el mismo plano.

Los vídeos se utilizan para determinar el periodo de oscilación  $T_0$  para cada péndulo. El valor del período de oscilación  $T$  de ambos péndulos debe ser idéntico. Si hay desviaciones, hay que corregir las longitudes de los péndulos.

Para el experimento con el muelle de acoplamiento, conectar el muelle a los dos ganchos de plástico de las varillas del péndulo en dos posiciones. Estas posiciones deben ser equidistantes del pivote del péndulo. Medir las amplitudes en función del tiempo con las siguientes condiciones iniciales:

## Montaje y ejecución (4/6)

PHYWE

- Ambos péndulos se desvían en la misma dirección con la misma amplitud y se liberan simultáneamente (oscilación "en fase").
- Ambos péndulos se desvían con la misma amplitud, pero en direcciones opuestas (oscilación "antifásica"), y se liberan simultáneamente.
- Un péndulo permanece en reposo. El segundo péndulo se desvía y se suelta (caso de batido). En este caso, sólo se pueden obtener resultados satisfactorios si los péndulos se reajustan adecuadamente durante la fase de preparación para que tengan realmente el mismo período de oscilación  $\bar{T}_0$ .

En los tres casos, las oscilaciones deben registrarse durante al menos uno o tres minutos. A continuación, se pueden determinar los valores medios de los correspondientes períodos de oscilación a partir de las curvas trazadas.

## Montaje y ejecución (5/6)

PHYWE

En cuanto al vídeo que se va a grabar, hay que tener en cuenta lo siguiente en cuanto a la configuración y el posicionamiento de la cámara:

- Ajustar el número de fotogramas por segundo a aproximadamente 30 fps.
- Seleccionar un fondo claro y homogéneo.
- Proporcionar iluminación adicional para el experimento.
- El montaje del experimento debe estar en el centro del vídeo. Para ello, colocar la cámara de vídeo en un trípode en el centro del montaje del experimento.

## Montaje y ejecución (6/6)



- El montaje del experimento debe llenar la imagen de vídeo lo más completamente posible.
- El eje óptico de la cámara debe ser paralelo al montaje del experimento.
- Para escalar, hay que medir la longitud del brazo del péndulo.

A continuación, se puede iniciar el proceso de grabación de vídeo y el experimento.



## Resultados

12/18

## Tarea 1 (1/2)

Transferir el vídeo al ordenador. A continuación, iniciar "measure Dynamics" y abrir el vídeo en "File" - "Open video ...". Marcar la longitud del muelle con la escala que aparece en el vídeo mediante "Análisis de vídeo" - "Escala ..." - "Calibración" e introducir la longitud del muelle sin carga (en este caso 14 cm) en la ventana de entrada. A continuación, crear tres nuevas columnas a través de la línea de menú de la tabla. Introducir la masa de las pesas (nombre: "Masa", unidad: "kg" o "g") en la primera columna, la longitud del muelle (nombre: "L", unidad: "m") en la segunda columna, y la elongación del muelle (nombre: "Elongación", unidad: "m", fórmula: "L-0,14") en la tercera columna. A continuación, abrir "Medir la longitud" en "Medir". A continuación, avanzar el vídeo hasta los puntos en los que los pesos adicionales están suspendidos del muelle. Introducir la masa y determinar la longitud del muelle en la misma línea (la escala que aparece en el vídeo está colocada a lo largo del muelle) e introducirla también.

Seleccionar "Visualización" y "Diagrama", hacer clic en "Opciones", borrar todos los gráficos ya existentes y seleccionar los gráficos "Masa" (eje horizontal) - "Alargamiento" (eje vertical). Esto lleva a:

## Tarea 1 (2/2)

La figura 3 muestra la relación lineal entre la masa y el alargamiento. Hacer clic en "Opciones" en la línea de menú del diagrama y seleccionar la pestaña "Regresión lineal", se añadirá una línea de regresión al diagrama y la función correspondiente se mostrará en la ventana de menú. En este caso, la pendiente de la línea es de 0,2862. Esto significa que la constante del muelle  $D_F$  es: 2,86 N/m.

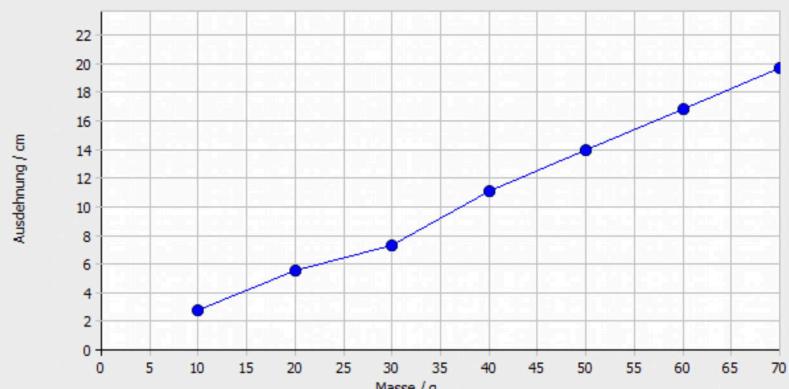


Figura 3: Representación del alargamiento del muelle en función de la masa a la que está sometido.

## Tarea 2 (1/2)



Transferir el vídeo grabado al ordenador. A continuación, iniciar "measure Dynamics" y abrir el vídeo en "File" - "Open video ...". Marcar el inicio del experimento ("Start selection" y "Time zero") y el final del experimento ("End selection") en el vídeo para su posterior análisis a través de la línea de menú situada encima del vídeo. El experimento comienza con la deflexión del péndulo y termina después de varias oscilaciones del mismo. Para este experimento, es importante asegurarse de que el experimento termina después de un número específico de oscilaciones. Determinar el número de oscilaciones y leer el tiempo necesario para estas oscilaciones.

Los siguientes resultados para el péndulo (1):

$$T_1 = 1.996 \text{ s}$$

$$\text{o } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 3.15 \text{ 1/s}$$

## Tarea 2 (2/2)



Los siguientes resultados para el péndulo (2):

$$T_2 = 1.996$$

$$\text{o } \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 3.15 \text{ 1/s}$$

Esto significa que los períodos de oscilación de los dos péndulos son idénticos. Si no es así, hay que corregir las longitudes de los péndulos en los experimentos posteriores hasta que los períodos de oscilación sean idénticos.

A partir de la ecuación (3) y de la masa conocida del péndulo  $m = 1 \text{ kg}$  de, los siguientes resultados para el momento de inercia del péndulo:

$$I_{1/2} = 0.978 \text{ kgm}^2$$

## Tarea 3 (1/8)

### (A) el "oscilación "en fase".

Transferir los vídeos grabados al ordenador de la misma manera que en la tarea 2 y especificar la hora cero, así como el inicio y el final del experimento. A continuación, marcar el brazo del péndulo con la escala que aparece en el vídeo mediante "Análisis de vídeo" - "Escala..." - "Calibración" e introducir la longitud que se ha medido previamente en la ventana de entrada. Además, introducir la velocidad de fotogramas que se ha ajustado para el proceso de grabación en "Cambiar velocidad de fotogramas" y situar el origen del sistema de coordenadas en el pivote del péndulo en "Origen y dirección". Girar el sistema de coordenadas haciendo clic con el botón derecho del ratón para que el eje -x apunte horizontalmente hacia la izquierda. A continuación, se puede iniciar el análisis de movimiento propiamente dicho en "Análisis de vídeo" - "Análisis automático" o "Análisis manual". Para el análisis automático, recomendamos seleccionar "Análisis de movimiento y color" en la pestaña "Análisis". En "Opciones" se puede optimizar el análisis automático, si es necesario, por ejemplo, modificando la sensibilidad o limitando el radio de detección. A continuación, buscar una posición de la película en el vídeo en la que sea perfectamente visible el objeto que debe analizarse. Hacer clic en el objeto. Si el sistema reconoce el objeto, aparece un rectángulo verde y se puede iniciar el análisis haciendo clic en "Iniciar".

## Tarea 3 (2/8)

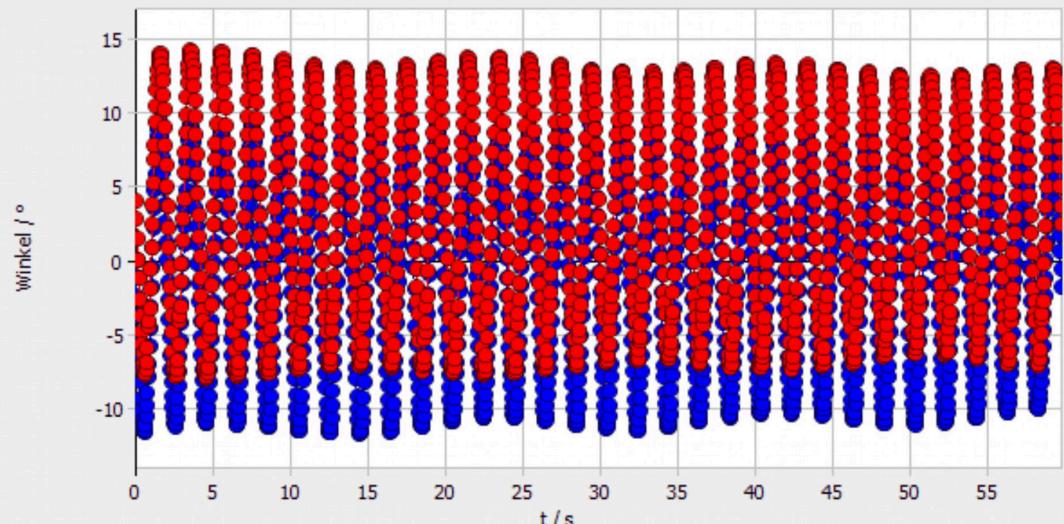
Si el análisis automático no conduce a resultados satisfactorios, la serie de mediciones puede corregirse en "Análisis manual" marcando manualmente el objeto que debe analizarse.

En este experimento, hay que analizar dos movimientos, es decir, los movimientos de los dos péndulos, en un solo vídeo. Para ello, se recomienda utilizar una hoja de trabajo distinta para cada movimiento, es decir, para cada análisis. Puede cambiar entre las hojas de trabajo en la línea de menú de la tabla. Primero, analizar el movimiento del primer péndulo, seguido del análisis del movimiento del segundo péndulo en una segunda hoja de trabajo. Para el segundo análisis, sin embargo, hay que cambiar la posición del origen del sistema de coordenadas. Moverlo hacia el pivote del segundo péndulo.

Como el péndulo oscila en un plano, recomendamos añadir otra columna a las hojas de trabajo a través de la línea de menú de la tabla. Esta nueva columna contendrá el ángulo de deflexión  $\varphi$ . La columna debe ser nombrada de la siguiente manera: Nombre: "Ángulo", unidad: "°", fórmula:  $\arctan2(x; y) * 360 / (2 * \pi)$ . Para la representación gráfica, abrir "Display" y "Diagram", hacer clic en "Options", borrar todos los gráficos ya existentes, seleccionar los gráficos t (eje horizontal) - "Angle" (eje vertical) de ambas hojas de cálculo y hacer clic en "Add". Esto lleva a:

**Tarea 3 (3/8)**

Figura 4:  
Representación de la desviación de ambos péndulos para la oscilación "en fase" en función del tiempo t.

**Tarea 3 (4/8)**

La figura 5 muestra que ambos péndulos oscilan con la misma amplitud y frecuencia  $\omega_g$ . El eje y- está desplazado, ya que la oscilación no es simétrica con respecto a la posición cero sin un muelle de acoplamiento. La frecuencia  $\omega_g$  es:

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.993s} = 3.151/s$$

Este valor corresponde al valor de la frecuencia característica del péndulo desacoplado. Como resultado, se ha confirmado la teoría.

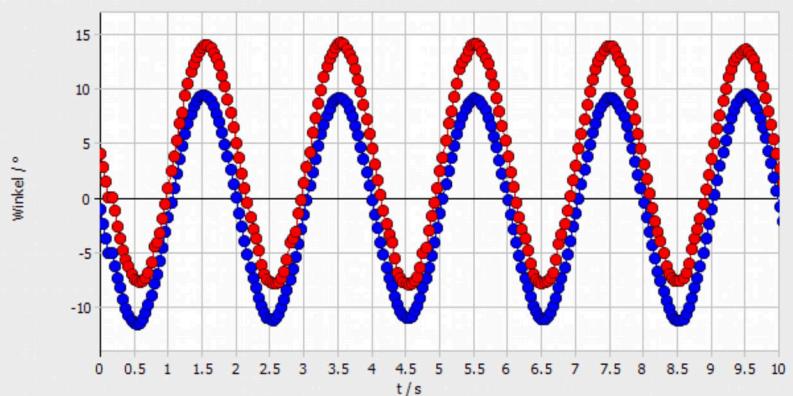


Figura 5: Detalle de la desviación de ambos péndulos para la oscilación "en fase" en función del tiempo t.

## Tarea 3 (5/8)

### (B) "Oscilación "antifásica".

Para la oscilación "antifásica", el proceso es el mismo que para A). Esto nos lleva a:

Si nos fijamos en un detalle más pequeño, resulta lo siguiente:

La figura 7 muestra que ambos péndulos oscilan con la misma amplitud y frecuencia  $\omega_c$  pero con una diferencia de fase de  $\pi$ .

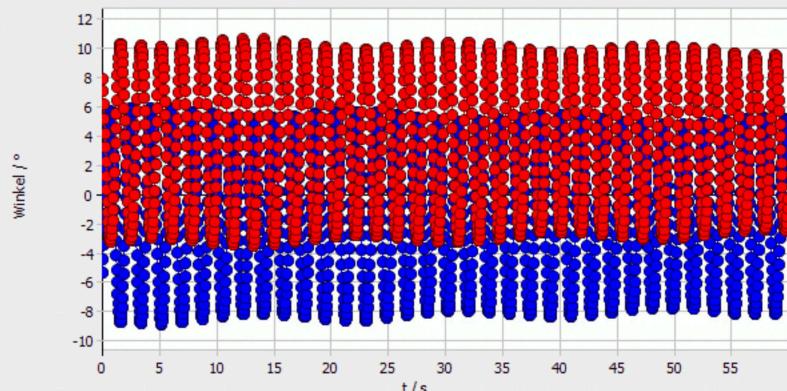


Figura 6: Representación de la desviación de ambos péndulos para la oscilación "antifásica" en función del tiempo t.

## Tarea 3 (6/8)

La frecuencia es:

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.789\text{s}} = 3.511\text{/s}$$

Basándose en la ecuación (13), la frecuencia teórica es:

$$\omega_c = 3.471\text{/s}$$

Como resultado, la teoría se ha confirmado.

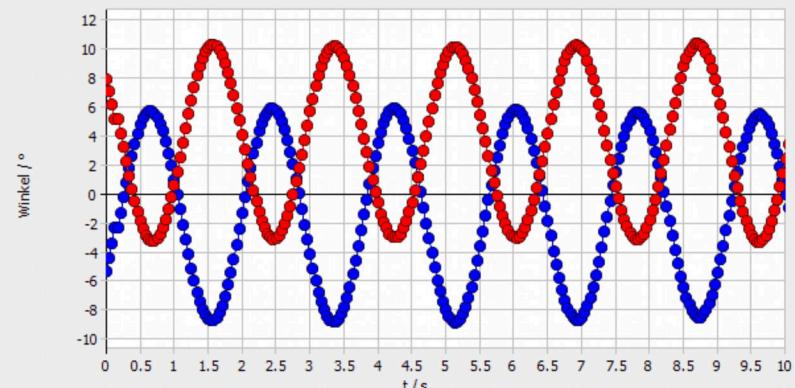


Figura 7: Detalle de la desviación de ambos péndulos para la oscilación "antifásica" en función del tiempo t.

## Tarea 3 (7/8)

### (C) caso de golpeo

El proceso para el caso "beat" es el mismo que para A) y B). Esto nos lleva a:

Si nos fijamos en un detalle más pequeño, resulta lo siguiente:

La figura 9 muestra que hay dos oscilaciones: la de ida y la de vuelta del péndulo con la frecuencia  $P_1$  y la transferencia recíproca de la amplitud con la frecuencia  $\omega_2$ . Lo son:

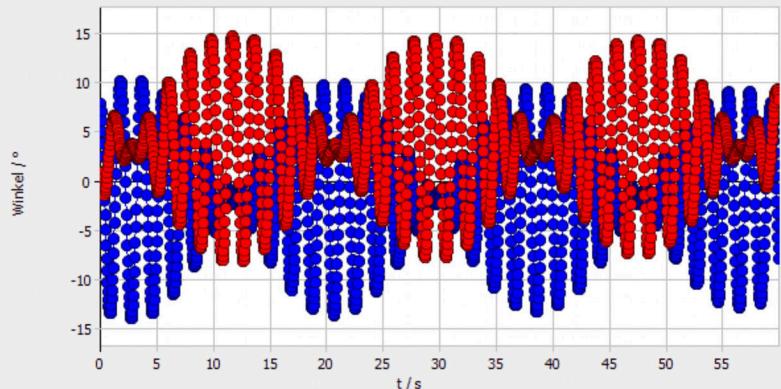


Figura 8: Representación de la deflexión de ambos péndulos para el caso "beat" en función del tiempo t.

## Tarea 3 (8/8)

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{35.87s} = 0.1751/s$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{1.789s} = 3.511/s$$

A partir de las ecuaciones (8a) y (8b) o (14) y (15), respectivamente, las frecuencias teóricas son:

$$\omega_1 = 0.1691/s$$

$$\omega_2 = 3.321/s$$

Los valores de frecuencia experimentales son casi idénticos a los valores teóricos calculados.

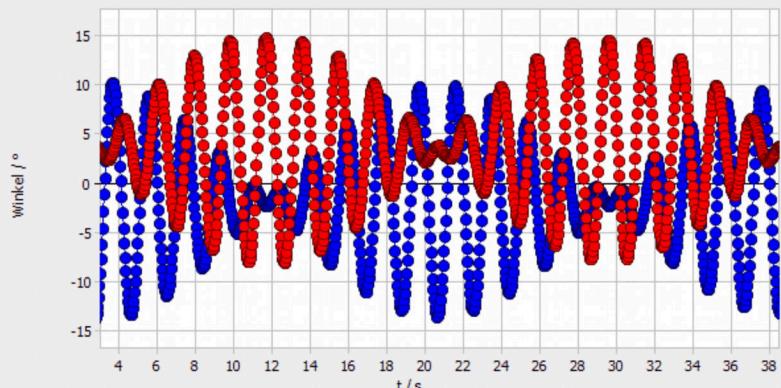


Figura 9: Detalle de la deflexión de ambos péndulos para el caso "beat" en función del tiempo t.